19/03/2018
8º μάθημα

Υπενθύμιση: Αν $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι ένας πίνακας. Ποια είναι η m-οστή δύναμη του A;

Αν ο A είναι διαγωνοποιήσιμος, τότε υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $\underline{P}$: $P^{-1} \cdot A \cdot P = \underline{D}$: διαγώνιος $\Rightarrow A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

και τότε : $A^m = P \cdot D^m \cdot P^{-1}$ όπου ο $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

τότε $D^m = \begin{pmatrix} \lambda_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^m \end{pmatrix}$

Πρόβλημα: Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (x_n), $n \geq 0$ έτσι ώστε:

$x_{n+1} = a \cdot x_n + b \cdot x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$, όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Έστω ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Τότε: $A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a x_n \quad b x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

Τότε : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = A \cdot A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ x_{n-2} \end{pmatrix} = \dots =$

όταν φτάνω το x_n

$$= A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}$$

Άρα, αν γνωρίζουμε τους όρους x_0, x_1 και τον πίνακα A^n, τότε μπορούμε να βρούμε τον όρο x_n, $\forall n \geq 0$.

$P_A(t) = \begin{vmatrix} a-t & b \\ 1 & -t \end{vmatrix} = -at + t^2 - b = t^2 - at - b$ αν το τριώνυμο έχει 2 διακεκριμένες ρίζες τότε είναι διαγωνοποιήσιμος.

όταν $b > 0$ και $a > 0$ τότε det θετική ~~ικανοποιείται~~ άρα A διαγωνοποιήσιμος;

Ελάχιστο Πολυώνυμο Πίνακα

Έστω $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ και έστω $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_m t^m$.

Ορισμός

Ο πολυωνυμικός πίνακας $P(A)$ ορίζεται να είναι ο πίνακας

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_m A^m$$

Πρόβλημα: Αν $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ υπάρχει μη-μηδενικό πολυώνυμο $P(t)$ έτσι ώστε $P(A) = 0$;

Θεωρούμε τους πίνακες $A^0 = I_n, A, A^2, A^3, \dots, A^m, \dots$ οι οποίοι ανήκουν στον $\mathbb{K}$-δ.χ. $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$.

Οι πίνακες: $I_n, A, A^2, \dots, A^{n^2}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα στοιχεία του $\mathbb{K}$-δ.χ. $\mathbb{M}_n(\mathbb{K})$, διότι: $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$

Άρα, υπάρχουν στοιχεία $a_0, a_1, \dots, a_{n^2} \in \mathbb{K}$, όχι όλα ταυτόχρονα ίσα με το 0, έτσι ώστε $a_0 I_n + a_1 A + \dots + a_{n^2} A^{n^2} = 0$.

Θέτοντας $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{n^2} t^{n^2}$ έχουμε ένα μη μηδενικό πολυώνυμο $P(t) : P(A) = 0$.

Από όλα τα πολυώνυμα $P(t)$ τα οποία είναι μη-μηδενικά και $P(A) = 0$ επιλέγουμε εκείνο με τον μικρότερο δυνατό βαθμό και το οποίο έχει ως συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου τον αριθμό 1. Το πολυώνυμο το οποίο ορίζεται κατ' αυτόν τον τρόπο καλείται ελάχιστο πολυώνυμο του πίνακα A και συμβολίζεται με: $\boxed{Q_A(t)}$

Παρατήρηση: Έστω $Q(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ ένα πολυώνυμο. (πότε ένα πολυώνυμο συμπίπτει με το ελάχιστο;) Τότε:

$Q(t) = Q_A(t) \iff$ 1) $Q(t) \neq 0$

2) $Q(A) = 0$

3) $a_k = 1$

4) Αν $Q'(t)$ πολυώνυμο και $Q'(A) = 0$ τότε $\deg Q(t) \leq \deg Q'(t)$

Π.Χ. Έστω ότι $A \in M_n(\mathbb{K})$ και έστω $P(t) = 3 + 5t + 6t^2 - t^3$
και έστω ότι: $P(A) = 0$.

Τότε $3 I_n + 5 A + 6 A^2 - A^3 = 0$

$\Rightarrow 5A + 6A^2 - A^3 = -3 I_n$

$\Rightarrow A(5 I_n + 6A - A^2) = -3 I_n$

$\Rightarrow A\left(\dfrac{5I_n + 6A - A^2}{-3}\right) = I_n$

Από εδώ βλέπουμε ότι A αντιστρέψιμος
και $A^{-1} = -\frac{1}{3}(5I_n + 6A - A^2)$

- Αν για το πολυώνυμο $P(t)$ ισχύει ότι: $P(A) = 0$
θα λέμε ότι ο πίνακας A μηδενίζει το πολυώνυμο $P(t)$.

Ορισμός
Ένα πολυώνυμο $P(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k$ καλείται κανονικό
αν και μόνο αν $a_k = 1$.

Αν $P(t)$, $Q(t)$ είναι πολυώνυμα υπεράνω του $\mathbb{K}$, τότε:
το $Q(t)$ διαιρεί το $P(t)$ και θα γράφουμε: $Q(t) \mid P(t) \Leftrightarrow$
υπάρχει πολυώνυμο $A(t)$: $P(t) = Q(t) \cdot A(t)$.

Ευκλείδεια Διαίρεση Πολυωνύμων: Αν $P(t)$, $Q(t)$ είναι πολυώνυμα
και $Q(t) \neq 0$, τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα $A(t), R(t)$:
$P(t) = Q(t) \cdot A(t) + R(t)$, όπου $R(t) = 0$ ή $\deg R(t) < \deg P(t)$.

Πρόταση
Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ και έστω $P(t)$ ένα πολυώνυμο έτσι ώστε $P(A) = 0$
Τότε: $Q_A(t) \mid P(t)$.

Απόδειξη
Από την ευκλείδεια διαίρεση του $P(t)$ με το $Q_A(t)$ ελάχιστο
πολυώνυμο του A. $P(t) = Q_A(t) \cdot H(t) + R(t)$ όπου είτε $R(t) = 0$
είτε $\deg R(t) < \deg Q_A(t)$. Αν $R(t) \neq 0$, τότε: $\cancel{P(A)}^{0} = \cancel{Q_A}^{0}(A) \cdot H(A) + R(A)$
επειδή από υπόθεση $P(A) = 0$ και εξ' ορισμού $Q_A(A) = 0$
$\Rightarrow R(A) = 0 \Rightarrow$ ο A μηδενίζει το πολυώνυμο $R(t)$.

και άρα επειδή υποθέσαμε ότι $R(t) \neq 0$ έπεται ότι $\deg R(t) \geq \deg Q_A(t)$
άτοπο
γιατί $\deg R(t) < \deg Q_A(t)$. Στο άτοπο καταλήξαμε υποθέτοντας ότι το
$R(t) \neq 0$. Άρα, $R(t) = 0$. Τότε $P(t) = Q_A(t) \cdot H(t) \Rightarrow Q_A(t) \mid P(t)$

Πρόταση

Έστω ότι $Q(t)$ είναι ένα πολυώνυμο έτσι ώστε:

α) Το $Q(t)$ είναι κανονικό και $Q(A)=0$.

β) Αν $P(t)$ είναι ένα πολυώνυμο έτσι ώστε $P(A)=0$, τότε $Q(t) \mid P(t)$

Τότε: $Q_A(t)=Q(t)$.

Απόδειξη

Το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ ικανοποιεί τη συνθήκη (β) της υπόθεσης. Άρα, από την υπόθεση: $Q(t) \mid Q_A(t)$ (1)

Από το (α) έχουμε ότι $Q(A)=0$ και τότε από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι $Q_A(t)=Q(t)$ (2)

Άρα, από (1), (2) $\Rightarrow$ $Q_A(t) \mid Q(t)$ και $Q(t) \mid Q_A(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \deg Q_A(t) = \deg Q(t)$$

Επειδή: $Q_A(t) = H(t) \cdot Q(t) \Rightarrow$ το $H(t)$ είναι ένα σταθερό μη-μηδενικό πολυώνυμο. Επειδή τα πολυώνυμα $Q_A(t)$ και $Q(t)$ είναι κανονικά, έπεται ότι $H(t)=1$.

Άρα, $Q_A(t)=Q(t)$.

Παραδείγματα

1) Έστω $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Τότε: $P_A(t)=\begin{vmatrix} -2-t & 3 \\ -1 & 2-t \end{vmatrix} = -4+2t-2t+t^2+3 = t^2-1$

Άρα, $P_A(t)=t^2-1$

Αν $\deg Q_A(t)=1$ τότε: $Q_A(t)=t+k,\ k\in \mathbb{K}$

Τότε: $Q_A(A)=A+kI_2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2+k & 3 \\ -1 & 2+k \end{pmatrix} \neq 0$

Άρα, έχουμε άτοπο, υποθέτοντας ότι $\deg Q_A(t)=1$.

Άρα, $\deg Q_A(t) \geq 2$.

$$P_A(A)=A^2-I_2=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= I_2 - I_2 = 0$ Άρα $P_A(A)=0$.

Άρα, $P_A(t)=Q_A(t)$.

Θεώρημα Cayley-Hamilton

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ ισχύει ότι: $P_A(A)=0$.

$$P_A(t) = |A - tI_n|$$

όπου $t=A$ τότε θα πάρουμε πίνακα $P_A(A) \in M_n(\mathbb{K})$

$t=A$ τότε θα παίρναμε αριθμό δηλ. $|A-A| = 0 \in \mathbb{K}$.

Άσκηση: Αν $A=\begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ τότε $P_A(t)=|A-tI_2| =$

$$= t^2-\underbrace{(a+\delta)}_{\text{ίχνος}}t+\underbrace{(a\delta-\beta\gamma)}_{\text{ορίζουσα}} = t^2 - Tr(A)\cdot t + |A|$$

Τότε $P_A(A)=0 = A^2-(a+\delta)A+(a\delta-\beta\gamma)|A|$